# ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ


K συμπαγές

$K \subseteq B(a,R)$

$K \subseteq B(a,\rho) \subset B(a,R)$

Εστω $z \in K$ : $|z-a|<\rho \rightsquigarrow |a_n(z-a)^n| \le |a_n|\cdot\rho^n$

$\rightarrow \sqrt[n]{|a_n|\rho^n} = \rho\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \limsup(\sqrt[n]{|a_n|\rho^n}) = \rho \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\rho}{R} < 1$

Δηλ. έχω μια σειρά που φράσσεται από μια άλλη συγκλίνουσα.

άρα $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n < \infty$ ①

Άρα, συμπεραίνουμε ότι

1. Η σειρά ① δεν συγκλίνει στο συμπλήρωμα του $B(\alpha,R)$
2. " " " συγκλίνει σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του δίσκου $B(\alpha,R)$ $(K \subset B(\alpha,R))$

## άλλο Θεώρημα:

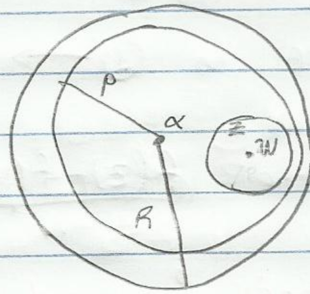
Εάν $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(z-\alpha)^\nu$ δυναμοσειρά ακτίνας R τότε η δυναμοσειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\alpha_\nu(z-\alpha)^{\nu-1}$ έχει ακτίνα R και επίσης

$\forall z \in B(\alpha,R)$ ισχύει : $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\alpha_\nu(z-\alpha)^{\nu-1} = \frac{d}{dz}\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(z-\alpha)^\nu$

Αποδ.

Εστω $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-a)^\nu$ και ΘΔΟ $f'(z) = g(z)$, $\forall z \in B(a,R)$

ΘΔΟ




$$\lim_{z \to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} = g(w) = f'(z)$$

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu\left(\frac{z^\nu - w^\nu}{z-w}\right) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\alpha_\nu w^{\nu-1} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu\left(\frac{z^\nu - w^\nu}{z-w} - n w^{\nu-1}\right)$$

όπου

$$\frac{z^\nu - w^\nu}{z-w} - \nu w^{\nu-1} = z^{\nu-1} + z^{\nu-2}w + \dots + zw^{\nu-2} + w^{\nu-1} - nw^{\nu-1} =$$

$$= (z^{\nu-1} - w^{\nu-1}) + (z^{\nu-2} - w^{\nu-2})w + \dots + (z-w)w^{\nu-2} =$$

$$= (z-w)(z^{v-2}+z^{v-3}w+\dots+w^{v-2})+$$
$$+(z-w)(z^{v-3}+z^{v-4}\cdot w+\dots+w^{v-3})w+\dots$$
$$\dots+(z-w)w^{v-2}=$$
$$=(z-w)(z^{v-2}+2z^{v-3}w+3z^{v-4}w^2+\dots+(v-1)w^{v-2}).$$

$$|a_v|\cdot\left|\frac{z^v-w^v}{z-w}-vw^{v-1}\right|=|z-w|\left|z^{v-2}+2z^{v-3}w+3z^{v-4}w^2+\dots+(v-1)w^{v-2}\right|=$$

$$\leq |z-w|\cdot(\rho^{v-2}+2\rho^{v-2}+3\rho^{v-2}+\dots+(v-1)\rho^{v-2})=$$
$$=|z-w|\cdot\left(\rho^{v-2}\cdot\frac{v(v-1)}{2}\right)$$

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|a_v\left(\frac{z^v-w^v}{z-w}-v\cdot w^{v-1}\right)\right|\leq\sum_{v=1}^{\infty}|a_v||z-w|\rho^{v-2}\cdot\frac{v(v-1)}{2}=$$

$$=\frac{|z-w|}{\rho^2}\sum_{v=1}^{\infty}|a_v|\cdot\rho^v\cdot\frac{v(v-1)}{2} \quad (1)$$

Εξετάζω αν $\sum_{v=1}^{\infty}|a_v|\rho^v\frac{v(v-1)}{2}<\infty$ μέσω Κρ. Cauchy

$$\limsup\sqrt[v]{|a_v|\rho^v\frac{v(v-1)}{2}}=\limsup\sqrt[v]{|a_v|}\cdot\rho\sqrt[v]{\frac{v(v-1)}{2}}=\frac{\rho}{R}<1$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει

Τότε η $(1)\longrightarrow 0$

δηλ. $\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\longrightarrow g(w)$

## Σειρές Laurent:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-a)^{-n}=\frac{a_1}{z-a}+\frac{a_2}{(z-a)^2}+\dots$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}b_n(z-a)^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n=$$

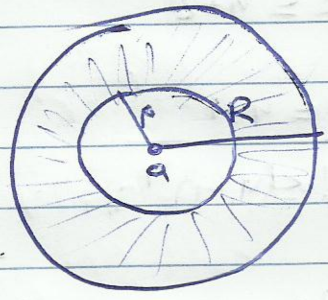
$$=\sum_{1}^{\infty}b_{-n}(z-a)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n.$$

όπου ισχύει η δυναμοσειρά συγκλίνει αν

$$\lambda = \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|\,|z-a|^{-n}} < 1 \quad ①$$

Έτσι, $\lambda = \frac{1}{|z-a|} \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|} \overset{①}{\Rightarrow} |z-a| > \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|} = \rho$

$\Rightarrow |z-a| > \rho$. αλλά $|z-a| < R \Rightarrow z \in \Delta(a, \rho, R)$




## Στοιχειώδεις Μιγαδικές συναρτήσεις

### ΡΗΤΕΣ

$p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_k z^k, \ \alpha_k \neq 0$

$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_k z^k}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_\lambda z^\lambda}$

### Συνάρτηση V. Zhukovski

$$\varphi(z) =: \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

### Εκθετικές

$e = \lim \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$ και $e^x = \lim_\nu \left(1 + \frac{x}{\nu}\right)^\nu = E(x)$

τότε $E(x) \cdot E(y) = E(x+y)$

$$e^x = E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Θα βρω την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

Παίρνω $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ και μελετώ το $\sqrt[n]{n!}$

Μονοτονία:

$$\sqrt[n]{n!} \le \sqrt[n+1]{(n+1)!} \Leftrightarrow (n!)^{n+1} \le [(n+1)!]^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n!)^n \cdot n! \le (n!)^n (n+1)^n \le n! \le (n+1)^n \text{ ισχύει διότι}$$

$1 \le n+1$     Άρα η ακολουθία $\sqrt[n]{n!}$ αύξουσα.
$2 \le n+1$     Έπειτα μελετώ αν είναι φραγμένη
$\vdots$     ή όχι.
$n \le n+1$

$n! \le (n+1)^n$

Παίρνω την υπακολουθία $\sqrt[2n]{(2n)!} = \sqrt[2n]{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n(n+1)\cdots(2n)} \ge$
$\ge \sqrt[2n]{(n+1)\cdots(2n)} \ge \sqrt[2n]{(n+1)^n} = \sqrt{n+1} \to +\infty$
Άρα, και η ακολουθία (αύξουσα) $\to +\infty$
Συνεπώς, η ακτίνα σύγκλισης είναι $+\infty$
άρα $z \in B(0, +\infty) = \mathbb{C}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- $\frac{d}{dz} e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots = e^z$
- $e^z \cdot e^{a-z} = \varphi(z) \rightsquigarrow \varphi'(z) = e^z(e^{a-z}(a-z)') + e^z \cdot e^{a-z} =$
  $= -e^z \cdot e^{a-z} + e^z e^{a-z} = 0$
  Έτσι $\forall z, a : e^z \cdot e^{a-z} = e^a$
  $a - z = w : \alpha = z + w$
  $\alpha = 0 : e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1 \rightsquigarrow e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
- $e^z \neq 0, \ z \in \mathbb{C}$

Σελ 99 (Πχ 4.4.1)

Έστω κύκλος (γ) με παραμετρική παράσταση $z(t)=r(\cos t+i\sin t)$ $t\in[0,2\pi]$ θα προσδιορίσουμε την καμπύλη Γ που είναι η εικόνα της γ μέσω της συνάρτησης με τύπο $f(z)=\frac{z}{\bar{z}}$

ΛΥΣΗ

Έστω $z=x+iy \rightsquigarrow \bar{z}=x-iy$

$$f(z)=\frac{x+iy}{x-iy}=\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\,\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Θεωρώ $x=r\cos t$ και $y=r\sin t$, $t\in[0,2\pi]$

$x^2+y^2=r^2$

$x^2-y^2=r^2(\cos^2 t-\sin^2 t)=r^2\cos 2t$

$2yx=2r\sin t\, r\cos t=2r^2\sin t\cos t=r^2\sin 2t$

Άρα,

$$f(z(t))=\frac{r^2\cos 2t+ir^2\sin 2t}{r^2}=\cos 2t+i\sin 2t \quad ,t\in[0,2\pi]$$

όπου $u(t)=\cos 2t$ και $v(t)=\sin 2t$, $t\in[0,2\pi]$

Θεωρώ $s=2t$

$u(s)=\cos s$ και $v(s)=\sin s$, $s\in[0,4\pi]$.

Βλέπω ότι

$u^2=\cos^2 s$ και $v^2=\sin^2 s \Rightarrow u^2+v^2=1 \Rightarrow$ Η εικόνα του $z(t)$ είναι ένας άλλος μοναδιαίος κύκλος διαγεγραμμένος 2 φορές, με θετική φορά.

Σελ. 100 (Πχ. 4.4.3)

Να προσδιοριστεί η εικόνα της καμπύλης παραμετρικής παράστασης: $z(t)=r(\cos t+i\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ με $r\neq 1$ μέσω της συνάρτησης $f$ τύπου $f(z)=z+\frac{1}{z}$, $z\neq 0$

ΛΥΣΗ

$$f(z(t))=r(\cos t+i\sin t)+\frac{1}{r(\cos t+i\sin t)}=$$

$= r\cos t + ir\sin t + \dfrac{r\cos t - ir\sin t}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} =$

$= r\cos t + ir\sin t + \dfrac{\cos t}{r} - i\dfrac{\sin t}{r} =$

$= \dfrac{r^2\cos t + \cos t}{r} + i \cdot \dfrac{r^2\sin t - \sin t}{r} =$

$= \dfrac{\cos t(r^2+1)}{r} + i\dfrac{\sin t(r^2-1)}{r} =$

$= \cos t(r+\frac{1}{r}) + i\sin t(r-\frac{1}{r})$

$f(z(t)) = u + iv$ οπου

$u = \cos t(r+\frac{1}{r})$

$v = \sin t(r-\frac{1}{r})$

$\dfrac{u}{r+\frac{1}{r}} = \cos t$ , $\dfrac{v}{r-\frac{1}{r}} = \sin t$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{u^2}{(r+\frac{1}{r})^2} = \cos^2 t$ , $\dfrac{v^2}{(r-\frac{1}{r})^2} = \sin t$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{u^2}{(r+\frac{1}{r})^2} + \dfrac{v^2}{(r-\frac{1}{r})^2} = 1$

ελλειψη

Αρα, η εικονα θα ειναι ελλειψη, διαγεγραμμενη μια φορα όπως στο $[0,2\pi]$ θετικής φορας

Σελ 107 (πχ 4.8.1)

Να βρεθεί το συνολο των μιγαδικων z στους οποίας η συνάρτηση με τύπο $f(z) = f(x+iy) = x^2 + iy^2$ παραγωγίζεται

ΛΥΣΗ

$f(z) = u + iv$ με $u(x,y) = x^2$ , $v(x,y) = y^2$

$u_x = 2x$ , $u_y = 0$ , $v_x = 0$ , $v_y = 2y$

απο Cauchy-Riemann θελουμε $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$

$\Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$ (και $0=0$)

Άρα, η $f$ πιθανώς παραγωγίσιμη στα $z=x+ix$.

$z_0=x+ix$ και $h=\alpha+i\beta$

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{f(x+\alpha+i(x+\beta))-f(x+ix)}{\alpha+i\beta} = \frac{(x+\alpha)^2+i(x+\beta)^2-(x^2+ix^2)}{\alpha+i\beta} =$$

$$= \frac{2x(\alpha+i\beta)+\alpha^2+i\beta^2}{\alpha+i\beta} = 2x + \frac{\alpha^2+i\beta^2}{\alpha+i\beta} \quad ①$$

$$\left|\frac{\alpha^2+i\beta^2}{\alpha+i\beta}\right| = \frac{|\alpha^2+i\beta^2|}{|\alpha+i\beta|} = \frac{\sqrt{\alpha^4+\beta^4}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \sqrt{\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha^2+\beta^2}} \leq \sqrt{\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{\alpha^2+\alpha^2}} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\xrightarrow{(\alpha,\beta)\to(0,0)} 0 \leadsto$$

$$\leadsto \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = 2x$$ . Η $f$ παραγωγ. στο $z=x+ix$ και η παράγωγος ισούται με $2x$

ΣΕΛ 111 (Πχ. 4.8.5)

Να εξεταστεί αν υπάρχουν σημεία $z$ στο $\mathbb{C}$ ώστε η συνάρτηση με τύπο:

$f(z) = \dfrac{2|z|^2+iz}{1+|z|^2}$ παραγωγίσιμη και αν ναι να βρεθούν οι παράγωγοι σε αυτά.

Λύση

Ισοδύναμες σχέσεις με τις Cauchy-Riemann είναι η εξής:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$$

$$f(z) = \frac{2z\bar z+iz}{1+z\bar z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{2z(1+z\bar z)-(2z\bar z+iz)z}{(1+z\bar z)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{z(2-iz)}{(1+z\bar z)^2} = 0 \Rightarrow z=0 \text{ ή } z=\frac{2}{i}=-2i$$

Άρα, $f$ πιθανώς παραγωγίζεται στα $z=0$, $z=-2i$

Έλεγχος: $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{2z\bar z+iz}{1+z\bar z}\Big/ z\right) = i$

Επίσης, έλεγχος:

$$\lim_{z\to -2i} \frac{f(z)-f(-2i)}{z-(-2i)} = \lim_{z\to -2i} \frac{\frac{2z\bar{z}+iz}{1+z\bar{z}}-2}{z+2i} = \lim_{z\to -2i} \frac{2z\bar{z}+iz-2-2z\bar{z}}{(z+2i)(1+z\bar{z})} =$$

$$= \lim_{z\to -2i} \frac{iz-2}{(z+2i)(1+z\bar{z})} = \lim_{z\to -2i} \frac{i\cancel{(z+2i)}}{\cancel{(z+2i)}(1+z\bar{z})} = \frac{i}{5}.$$